

Géométrie dans l'espace #1



Prof Essbai

Déterminant - norme

- Déterminant de 3 vecteurs (Dans l'espace) : $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix}$$

- Norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$



Vecteurs Coplanaires (appartenant au même plan)

- trois vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si :
 $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$
- trois vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si :
 $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$

Produit scalaire :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} : \vec{u} \cdot \vec{v} = a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$$

Produit vectoriel

$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ deux vecteurs Dans un repère dans l'espace
 $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ (perpendiculaire à un plan des deux vecteurs) tel q:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a & d \\ c & f \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix} \vec{k}$$

Équation cartésienne d'un plan P définie par deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point A :

$$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$$

Et donc on trouve l'équation du plan P :

$$ax + by + cz + d = 0$$

*autre façon : on donne $\vec{n}$ un vecteur normal au plan, donc on remplacera $(\vec{u} \wedge \vec{v})$ par $\vec{n}$.

Distance entre un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un plan

$$d(A; P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

avec $(P): ax + by + cz = 0$