

Logique : 5- Raisonnements (Contre ex + équivalences)

Un raisonnement mathématique est l'outil le plus efficace pour montrer une assertion, chaque exercice nécessite un type différent de raisonnement



Prof Essbai

Raisonnement par contre-exemple :

ce raisonnement est utilisé toujours quand on veut montrer qu'une assertion de type $(\forall)$ est fausse

Ex : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ est fausse

Donc dès que tu vois ce type , tu réfléchiras à utiliser le contre-exemple.

Comment l'utiliser ?

Pour montrer qu'une assertion P est fausse par contre-exemple : Il faut directement au contraire (négation) de l'expression qui débute par $(\forall)$;

C'est évident que la négation commencera avec $(\exists)$. Donc il suffit de trouver un seul nombre qui vérifie la négation de P.

Pour l'exemple précédent, il suffit de montrer : $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$

Raisonnement par équivalences successives :

ce raisonnement est utilisé toujours quand on veut Assurer les 2 sens de l'expression ; en utilisant $(\Leftrightarrow)$

ex : Montrer que :

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$$

Donc dès que tu vois ce type , tu réfléchiras à utiliser l'équivalence.

Comment l'utiliser ?

Pour montrer qu'une assertion $(P \Leftrightarrow Q)$ est Vrai Soit :

- On commence par P et puis on arrive à Q (par équivalence)
- On commence par Q et puis on arrive à P (par équivalence)
- On montre que $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ sont vraies
- On peut montrer que $P \Leftrightarrow E$ et $Q \Leftrightarrow E$ donc $(P \Leftrightarrow Q)$

Exemple : Montrons par Contre-exemple que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0 \text{ est fausse}$$

Il suffit de poser $x = 0$

$$\text{Donc } x^2 = 0 \leq 0$$

D'où, il existe $(\exists)$ un nombre (0) qui ne vérifie par la proposition (il vérifie sa négation), puis la proposition P est fausse

Exemple : Montrons par équivalence que :

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - 1 + \sqrt{y^2 + 1} - 1 = 0$$

$$\text{On sait que : } x^2 \geq 0 \text{ donc } x^2 + 1 \geq 1$$

$$\text{et alors: } \sqrt{x^2 + 1} - 1 \geq 0 \text{ et } \sqrt{y^2 + 1} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - 1 = 0 \text{ et } \sqrt{y^2 + 1} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 1 \text{ et } \sqrt{y^2 + 1} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$