

Logique : 4- Raisonnements (Absurde + Contraposée)

Un raisonnement mathématique est l'outil le plus efficace pour montrer une assertion, chaque exercice nécessite un type différent de raisonnement



Raisonnement par Absurde :

ce raisonnement est utilisé toujours quand on veut montrer qu'une assertion est fausse (le type des questions qui nécessite de travailler avec le raisonnement par absurde : montrer que ... n'a pas de solution , Montrer que $X \notin$, Montrer que $A \neq 0..$)
Donc dès que tu vois une négation, tu réfléchiras à utiliser l'absurde.
Ex : Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Comment l'utiliser ?

Pour montrer qu'une assertion P est vérifiée par Absurde :

1) on Suppose que P est fausse () alors $\bar{P}$ est **Vraie ($\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$)**

2) On travaille avec $\bar{P}$ en utilisant l'implication et on trouve une Contradiction (تناقض), Donc $\bar{P}$ est fausse et alors P est **Vraie
 $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est fausse donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ est vraie**

Raisonnement par Contraposée :

ce raisonnement est utilisé toujours quand on veut montrer une assertion sous forme d'une implication $\Rightarrow$ mais qui contient une négation ($P \Rightarrow Q$) (P et Q contiennent une négation)

ex : Montrer que :

$$(x \neq y) \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$$

Donc dès que tu vois ce type , tu réfléchiras à utiliser la contraposée.

Comment l'utiliser ?

Pour montrer qu'une assertion P est vérifiée par la contraposée :

Au lieu de montrer que $P \Rightarrow Q$, On montre que $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$

Pour l'exemple précédent, il suffit de montrer :

$$(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow (x=y)$$

Exemple : Montrons par absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

On suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$$\text{Alors: } \exists (a; b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*: \sqrt{2} = \frac{a}{b} \text{ avec } a \wedge b = 1 \\ \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2 \cdot b^2 \Rightarrow a^2 \text{ pair} \Rightarrow \text{a pair}$$

de la même méthode on montre que b est pair

Alors c'est une contradiction car on a supposé que $a \wedge b = 1$ 'impossible que deux nombres premiers entre eux soient pairs.

Exemple : Montrons par contraposée que :

$$(x \neq y) \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$$

il suffit de montrer :

$$(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow (x=y)$$

$$(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$$

$$\Rightarrow xy - x + y - 1 = xy - y + x - 1$$

$$\Rightarrow -x + y = -y + x$$

$$\Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$$