

Logique : 6- Raisonnements (Récurrence)

Un raisonnement mathématique est l'outil le plus efficace pour montrer une assertion, chaque exercice nécessite un type différent de raisonnement



Raisonnement par Récurrence :

ce raisonnement est utilisé toujours quand on veut montrer qu'une assertion Sous forme de : $P(n)$ est vraie tel que n entier Naturel

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ 11/(3^{2n} + 2^{6n-5}) \text{ Ou}$$

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$$

Donc dès que tu vois ce type , tu réfléchiras à utiliser la récurrence.

Comment l'utiliser ?

Pour montrer qu'une assertion $P(n)$ est vrai pour tout n d'un ensemble I (soit $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ ou..) par récurrence, il faut passer par les 3 étapes :

- 1) Initialisation : Montrer que $P(n)$ est vrai pour le 1^{er} élément (n_0) de I
- 2) On suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain n de l'ensemble I . Puis on montre qu'elle est vraie pour $(n+1)$
- 3) On généralise que $P(n)$ est vraie pour tout n de I

Ex : Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ 11/(3^{2n} + 2^{6n-5})$$

→ Pour $n=1$:

$$11/3^2 + 2^1 \Rightarrow 11/11 \text{ Vraie}$$

Supp que : pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$11/(3^{2n} + 2^{6n-5})$$

→ Et mq : $11/(3^{2(n+1)} + 2^{6(n+1)-5})$

$$\text{donc } 11/(3^{2n+2} + 2^{6n+1})$$

On a :

$$11/(3^{2n} + 2^{6n-5}) \Rightarrow 3^{2n} + 2^{6n-5} = 11k$$

$$\Rightarrow 3^{2n} = 11k - 2^{6n-5}$$

$$\Rightarrow 3^{2n} \cdot 3^2 = (11k - 2^{6n-5}) \cdot 3^2$$

$$\Rightarrow 3^{2n+2} = 11k' - 2^{6n-5} \cdot 3^2 / \quad k' = k \cdot 3^2$$

$$\Rightarrow 3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 11k' - 2^{6n-5} \cdot 3^2 + 2^{6n+1}$$

$$\Rightarrow 3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 11k' + 2^{6n-5}(2^6 - 3^2)$$

$$2^6 - 3^2 = 55 = 5 \cdot 11 \text{ on pose } k'' = 2^{6n-5} \cdot 5$$

$$\text{Alors } 3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 11k' + 11k'' = 11K$$

→ D'où

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 11/(3^{2n} + 2^{6n-5})$$

Ex : Montrer que

$$\sum_{k=0}^n 3^k = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$$

→ Pour $n=0$:

$$3^0 = 1 \text{ et } \frac{1}{2}(3^{0+1} - 1) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \text{ Vraie}$$

→ Supp que : pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n 3^k = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$$

Et On montre

$$\sum_{k=0}^{n+1} 3^k = \frac{1}{2}(3^{n+2} - 1)$$

$$\text{on a: } \sum_{k=0}^{n+1} 3^k = \sum_{k=0}^n 3^k + 3^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1) + 3^{n+1} = 3^{n+1} \left(\frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3^{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^{n+2} - 1)$$

→ Alors (résultat)